

论近代科学的数学化

陈嘉映

(华东师范大学哲学系, 上海 200062)

摘要: 近代科学在某种意义上经历了一个数学化的过程。数学的最大特点在于进行长程推论而不失真, 因此科学可以借数学语言通达感官远远不及的世界而保持真实。但反过来, 数学对理解充满感性的日常世界只有很少的、间接的帮助。

关键词: 数; 数学; 近代科学; 感性;

中图分类号: B5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5579(2005)06-0027-11

一、引子

科学史家大都把数学化视作近代科学的主导因素。丹齐克一部名著的书名即谓“数——科学的语言”。^[1]一个世纪之前, 迪昂在“物理学理论的结构”一篇, 开篇即明称“理论物理学是数学物理学”。^{[2](p.121)}他接着说, 到今天, 健全心智几乎不可能再否认物理学理论应该用数学语言来表达。温伯格满怀敬意说到希腊的思想家, 特别是原子论者, 然后口风一转, 在希腊“科学”中, “没有一点儿东西像我们今天对一个成功的科学解释的理解: 对现象必须有定量的认识”。^{[3](p.5)}霍金曾说: “一个物理理论即是一个数学模型。”^①我们还可以继续引用柯瓦雷, 引用库恩, 以至无穷。实际上差不多没有哪位物理学家或科学史家不认为数学化是近代科学的主要特征。明末清初西方科学渐入东土之际, 有识之士也慧眼明见数学的枢机作用, 徐光启是中国人最早领悟并介绍西洋科学的前贤, 大概也是他最早认识到西方科学的精髓或基础在于“度数之学”, 四库全书总目也说: “西洋之学, 以测量步算为第一。”^②

要了解科学的性质, 我们就不能不对科学的数学本性做一番考察。

科学是在希腊—欧洲传统中发展起来的, 应能设想, 数学在源自希腊的西方思想—文化传统中具有特殊地位。克莱因在《西方文化中的数学》一书的前言里开篇即说: “在西方文明中, 数学一直是一种主要的文化力量。”^{[4](p.6)}就古代数学的发展来说, 我们不会否认巴比伦人、埃及人、印度人、阿拉伯人、中国人的贡献, 不过, 我们这里谈论的主要不是数学学科的发展, 而是数学在观念整体中的位置。古希腊的智慧取了一种特殊的形态, 我们称之为

收稿日期: 2005-08-27

基金项目: 国家社科基金项目(04BZX037)

作者简介: 陈嘉映(1952—), 男, 上海市人, 华东师范大学哲学系教授, 博士生导师。

哲学。希腊人的哲学兴趣和古希腊人对数学的偏爱显然密切相关。据记载，柏拉图学院的门口处写着：不懂数学者不得入内。众所周知，柏拉图把算术和几何视作培养哲学家的最初两门预备课程，照柏拉图的说法，“数的性质似乎能导向对真理的理解。……学习几何能把灵魂引向真理，能使哲学家的心灵转向上方”。^{[5](pp.525.527)}

到中世纪后期和近代中期，欧洲复兴了哲学—科学的热衷，这个时期对数学的重视越发显眼。中世纪晚期，柏拉图主义在一些智者那里获得重要影响。库萨的尼古拉宣称，数是事物在造物主心中的第一模型。不过，他仍然认为不可能用数学方式去处理自然。而罗吉尔·培根则相信大自然是用几何语言写成的。达·芬奇称说：“欣赏我的作品的人，没有一个不是数学家。”哥白尼革命的一个主要动力是新柏拉图主义的信念：他的体系将揭示上帝创世的和谐对称的设计。罗吉尔·培根的话经伽利略重述而家喻户晓：“大自然这部书是用数学文字写成的。”在科学的数学化进程中，伽利略是转折点上的人物，因为他远不止于再次表达了新兴科学家的一个基本思想，而是开始实现这一思想。开普勒宣称世界的实在性是由其数学关系构成的。笛卡尔明言他最热爱数学，他记述了他1619年11月10日的那个著名的梦，在梦中他得到真理的启示，从此要把整个物理学还原为几何体系。“给我运动和广延，我将构造出宇宙。”笛卡尔把物质世界还原为由长宽高三维构成的广延，这当然是因为广延是可以充分量化的。物体的运动归根到底是力的机械作用，真实的世界是一个可以用数学表达出来的在时空中运动的整体。整个宇宙是一架庞大的、和谐的、用数学设计而成的机器。

近代科学首先在天文学和天体力学领域发展起来，这一事实与天文现象、天体运动适合数学处理关系极大。我们身边的事物极为繁杂，即使一片落叶，也受到无数因素的干扰，而相比之下天体的运动就“纯粹”多了，天体的实际轨道和理想的几何图形之间极少差异，因此最适合用数学来处理。正是数学在天文学中的成功运用鼓励牛顿把数学扩展到一切物体的运动上来。最后，达朗贝尔等人主张把力学视作数学的一个分支。

二、实在：数运与数学

数对我们来说是数字、用来进行数学推论的单位，但“数”另有一重含义，我们今天仍然能从命数、天数、气数、劫数这类词中体会得到。这里，数和命运、和某种超乎人们感知、掌控的客观者联系在一起：“天高地迥，觉宇宙之无穷，兴尽悲来，识盈虚之有数”。命运等意义不是附加到数这个概念上的，数的原始观念包含命运、神秘的规律之类。

在中国，数的观念是从筮占发展出来的。龟卜、筮占两者最重要的区别在于前者是象征，后者是推衍。龟象自然成纹，个个有别，龟卜无须推衍，只凭直观，而卦象则是一些类别，分成八类或六十四类或某些类，筮占是通过推衍来进行的。此所谓“龟，象也，筮，数也”^③。李零解释说：“‘象’是形于外者，指表象或象征；‘数’是涵于内者，指数理关系或逻辑关系。”^{[6](p.35)}所谓“易”，就是筮数的体系，所以孔子说周易“达于数”。

数的观念体现了本体世界和现象世界的分离。世界不再被理解为现象/事物间的感应，而是被理解为实在世界的自行运转以及现象/事物随之运转。在感应世界里，原无内外之别，现象/事物的交互作用，就发生在我们眼前。到理性时代，世界的规律作为数，隐藏在现象的背后去了。数自己遵循着自己的规律循环替代。就数的运行决定现象世界而言，数世界才是实在，现象则是数运的展现。

的确，感性的物质世界竟然体现着数字的抽象关系，这个发现是令人惊异的。毕达哥拉斯学派发现，发出和谐音的琴上，每根弦的长度必成整数比。这是一个著名的例子。乐音这

样远离逻辑抽象而充满感性的现象竟然是由数决定的，这让远隔重洋的中国人同样感到惊异：“试调琴瑟而错之……五音比而自鸣，非有神，其数然也。”^[6]天文学是最早系统运用数学的领域，其实，就数之为数运而言，它一开始就和天空有格外紧密的联系。喜帕恰斯通过他的均轮、本轮模型，对“七大行星”的运行做出了相当准确的描述，使得对月食的预测精确到了一两个小时之内。不难类推，在其他形形色色的现象背后也同样有数运。今天的科学家们仍然为同类的事情惊诧不已。不同植物的花瓣数目有的是3，有的是5，或者是8、13、21、34……这只是一串杂乱无章的数字吗？不，其中每一个数字都是前面两个数字之和。大自然怎么会用这样意想不到的数学游戏来安排花瓣呢？“数学模型或公式突然之间就把那些它们从未打算介入的领域……梳理得井井有条，这种经历是十分令人难忘的，而且极易使人相信数学的神奇能力……在科学的童年时代，对上述神奇的自然本性所作的草率结论，并不会使我们感到惊奇。”^[7](pp.38-39)

本体世界是不可能被直接看到、被直接经验到的，我们只能通过推论、论证通达它，通过理智的力量通达它。正是这一点让理论家们赋予理智和理论以一种更高的地位，因为理智才能通达世界的实在。

无论是阴阳五行这一类“伪科学理论”还是现代物理学，都是用数这类抽象元素之间的关系来统领各个不同领域中的事物与现象。不过，数运里的数观念不尽等同于数学里的数观念。数运中的数充满了象征，即数与现象的直接联系，而数学中的数却洗净了象征意义。

邹衍和董仲舒对数学并未作出任何贡献，毕达哥拉斯学派则不同，他们是一些真正的数学家，发现了包括勾股弦定理在内的很多几何、数学关系，不妨说数论研究就是毕达哥拉斯学派开始的。但即使在毕达哥拉斯那里，对数的兴趣也不是单纯的数学兴趣，在他们那里，对数字本质的理解是和对神、对世界上各种其他现象的理解交织在一起的，甚至有论者称他们的数学思辨“都是从宗教的灵感中引申出来的。”^[8](p.61)代表理性，因为理性是一整体。四是正义，^[9]它是第一个偶数的自乘，而正义包含着互相酬报^[10]。七是智慧之神秘纳发，因为在十个个位数中，只有七既不为其所包含的数所产生，也不产生其中任何一个数。十是一个完美的数，十包含了相同数目的质数和合数，是前四个正整数之和，因此可以图示为神圣三角。在这种种提法中，我们看到数学之数 and 现象的混杂，实际上，“数是万物的本源”这一毕达哥拉斯原则的主要论据就在于万物与数相似。

数运是事物的高度概括。数运之为概括，依赖于现象的相似或同构，五行概括了五官、五音、五色。这种对应的同构自有经验的基础。正义和自乘似乎有某种联系，乐音和弦长更是有明确的关系。所以古人说“同类相从，同声相应，固天之理也。”^[11]然而，真正的数学和科学所要求的却不是这种现象上的相似，也不是数的结构和现象的直接对应。花瓣的数目是3、5、8、13、21、34……这个奇异的序列是需要解释的，后来也的确连同生物学中的另一些同类奇异现象得到了解释，那是研究生物系统的复杂性的成果，而不是我们找到了哪种基因结构和这个斐波那契级数直接对应。自然也许是简单的，但“自然的那些简单性并不直接呈现在我们面前，而是以其独特的、难以捉摸的方式表现出来。”^[12](p.98)对于我们的感性来说，看上去相同就是相同，看上去不同就是不同。鸟类、蝙蝠、蚊子的翅膀看上去是一类东西，我们就把它们归为一类东西。借助数学之类的推理，我们才穿透现象的拦截，达乎结构性的知识。

洗去了现象象征，数才变成纯粹的数，数学之数。数字不象征什么别的东西，数字本身没有内涵，数字之间的关系是纯粹外部的关系。每一个数的“意义”都由其他的数来界定，

而无涉乎数以外的东西。如此获得自主的数学是“科学的”数学。科学的数学不受现象的束缚，从而获得自治，可以安然地按照逻辑来发展。正多面体正好有五种，但这不是从五行推衍出来的，而是在数学内部加以证明的。

今天我们说到的数学，是洗去了象征的、纯粹的数之间的演算。从一个算式通往另一个算式是证明，或曰严格的演绎证明（demonstration），而不可借助任何其他东西如象征、想象。证明方法在希腊最为发达，欧几里德几何学是最突出的成就，即使在今天，用《几何原本》来作初级教育的教科书也无大碍。像希腊思想的其他因素一样，数学对希腊人也是舶来品，来自巴比伦、埃及。但是，像其他舶来品一样，数学到了希腊，改变了自己的面貌。“从一开始，希腊数学同埃及、巴比伦的数学就有区别；……希腊几何学所追求的目标是抽象的几何知识、规范的推理和证明方法。”^{[10](p.91)}与之对照，如史蒂芬·巴克所言，“作为东方数学中的一种典型做法，巴比伦人、印度人和阿拉伯人并不怎么关心给出有关的证明来，更不必说把他们关于数的知识组织成公理化形式的系统了”。^{[11](p.114)}数学史家斯科特表达了相同的看法：“在整个东方数学中，任何地方都找不到丝毫的证据可以看出有我们所称之为证明的那种东西。”^{[12](p.69)}斯科特接着引用 Sedgwick and Tylor 说，印度数学家对我们所说的数学方法是没有什么兴趣的。^③

获得这种自主性的数学成为一种自主的语言。语言和现实不是两种事物，可以类比：相似、相同、不同。语言是现实的一种呈现方式。对于自主的数学来说，自然现象不再通过类推的方式和数发生联系。欧几里德发现，光线在镜面上发生折射的时候，入射角等于反射角。这和一个几何定理相应：在一条直线（ XX' ）同一边的任意两个点 A 和 B ，经过直线上的一点 P 相连，当角 $APY = \text{角} APX'$ ，连线（ APB ）最短。在这里，欧几里德并非发现有一种光学现象和一种几何现象相同，而是在表明，光的折射本来就是一种几何现象，或更确切说，几何语言才能更准确地更有效地描述光的折射，从而使我们能够对光线的静态关系进行更深入的研究。

科学采用数学语言以构建科学理论。科学是理论，但理论并不都是科学理论。数把阴阳五行造就为理论，但没有把阴阳五行造就为科学。科学理论能够预言彗星的到来，能够探知化石中埋藏的远古世界，这和五行理论通过数运概括以鉴往知来不是一类。

尽管数运之数 and 数学之数有重大的区别，但数，无论被理解为数运还是理解为纯粹数学，对理论建构都具有基本的意义。数运在阴阳五行理论中的作用，与数学在近代物理理论中的作用颇多相类之处。就像古代的命运、规律观念坐落在数运之中，我们今天的物理规律最终也要合并到数学中去。

从科学的发展来看，洗脱数的感性性质是极大的进步。然而，这一过程同时就剪断了数字和我们对其他事物的感受之间的联系，剪断了数和自然理解之间的联系，数不再具有概念内容，不再是编织在其他概念之中的一些自然概念，我们不再从数字的概念内容来把握它们，它们是一些完全依赖于互相之间的比例关系得到定义的符号，组成了一个完全独立的自治领域。

三、科学的数学化

毕达哥拉斯第一个提出“数是万物的原理”。的确，从科学史角度来看，毕达哥拉斯学派占有突出地位，他提出数是原因、原理，数决定功能。这一见识可以引导我们去把不同结构（不同原理）之间的联系加以形式化，从而可能产生通向“统一科学”的努力。不过，除

了在声学领域，这一学派在解释自然时对数的应用不是科学的，而是思辨的或神秘的。在毕达哥拉斯那里，数是有概念内涵的，每个数都独立地具有意义，而在此后的漫长的思想历程之中，人们逐渐学会了从完全的外在性来把握数字，形成了科学的数学语言。

柏拉图深受毕达哥拉斯学派影响，禀有数学取向。然而，对柏拉图来说，数学是入门的，是哲学的准备。

亚里士多德在他的物理学里也提供了对运动进行数学分析的一些线索，但他总体上否认数学对理解自然现象的作用。适合于数学分析的是位移，但位移不过是诸种变化中最简单的一种，其他变化，例如植物的生长，很难用数学来加以描述。亚里士多德甚至明确反对在物理学中引进数学，其理由是，物理学是用来研究经验世界的，而数学却是脱离了经验的抽象。反对在物理学中运用数学，会让现代人觉得惊奇，但我要提醒说，亚里士多德的《物理学》是部哲学著作，原本就更该译作《自然哲学》，它不是要建立一个描述物理世界的形式系统，而是要从概念上解释物理现象的所以然，数学在这里的确没有用武之地。

阿基米德的杠杆原理、欧几里德的光学、托勒密的数理天文学等等是些真正的异数，今天回顾，他们的确是实证科学的先驱，然而，他们不是希腊 episteme 的代表。天文学、光学、声学（乐声学）、静力学在泛希腊化时期以及后来在中世纪逐渐形成了近代数学化科学的雏形，但它们当时并未对哲学思辨的统治地位构成丝毫挑战。

哲学和数学的关系到近代发生了根本的转折，若说在柏拉图那里，数学曾经是研习哲学的准备，那么对伽利略来说，数学是用来取代哲学的，如果哲学还值得研习，那它是为用科学方法研究现实作些准备。

近代科学从根本上是对自然的数学化认识。把注重数学和注重实验作为近代科学的两个并列的特点反而会使近代科学的本质变得模糊不清。科学史家经常提醒我们，古代科学家对实验手段并不陌生。另一方面，近代科学发展初期的科学家多半是学者型的理论家，他们主要从事原理探索，从外表上看，他们和传统的哲学家非常相似。伽利略本人就说过他很少做实验，他做实验的主要目的是为了反驳那些不相信数学的人。人们一开始引入近代实验方法，在很大程度上不是为了验证新科学的理论，而是为了反对经院哲学的成说，反对宗教一哲学理论。大多数实验是由工匠、技师做的，“他们没有找出更深的内容和规律性的东西，只是获得了一些普遍的、实用性的知识。而且，直到 17 世纪中叶，所做的实验都不是判决性的”。^{[4](p.107)} 实验的地位受到广泛质疑，理论家们不仅不大信任实验方法，有时甚至认为实验方法是反科学的。

数学化不仅是近代科学诸特征中最突出的特征，数学化从本质上规定着近代科学。海德格用他特有的句式说道：“近代科学的基本特征是数学性的东西，这倒不是在说，近代科学是用数学进行工作的；这倒是要在某种意义上表明，狭义的数学只有根据近代科学才得以发生作用。”^{[13](p.586)}

讲到这里，我们可能会想到柏拉图的蒂迈欧篇，他在那里把基本元素设想为几种正多面体，即一些纯粹的几何形态。的确，和亚里士多德相比，柏拉图的数学倾向非常突出。在西方思想传统内部，人们一直看到两种对立的取向，一是毕达哥拉斯—柏拉图传统，他们重数、数学、形式，一是亚里士多德传统，重经验、生物学、有机生长。尽管如此，我们仍不难看到柏拉图和笛卡尔的巨大差别。首先，柏拉图的正多面体元素尽管体现了把自然数学化的一大步，但它更多是一种形而上学解释，而不是拉卡托斯意义上的研究纲领。其次，在希腊（以及在中世纪），主宰数学王国的是几何，代数始终处于附庸的地位。几何形态，如三

角形、圆、立方体等，是具有质的。这一点曾由亚里士多德格外予以强调。而笛卡尔把质从几何学中消除了。笛卡尔创建了解析几何，使代数成为数学王国的君王。通过解析几何的技巧，很多原本被认定为不同性质的线和图形被归约为可以换算的代数公式，从而，“以前一向为几何学家所避免的许多曲线就有了和比较常见的曲线相同的地位了”。^{[12](p.114)}在笛卡尔的几何学中，在对几何的这种新的理解中，几何学本身也不再依赖于形象，图形只是数学公式的外部表现而已。数学在欧几里德那里脱离了感应，在笛卡尔这里脱离了感性。

自然哲学是所谓定性的，它致力于解释现象为什么会发生的原因。例如亚里士多德用大量篇幅尝试解答为什么抛向空中的物体会回落到地面上。希腊思想家用自然厌恶真空来解释虹吸等现象。与之相对，近代科学要求的是定量研究，例如一个落体下落时间与下落速度、下落距离之间的函数关系。伽利略指出，关于原因—原理的玄思并不能够增加知识，这种玄思的进展不过是一种解释取代了另一种解释，哪怕我们用一种较合理的解释取代了一种较稚弱的解释，我们的知识并没有什么增进。伽利略是对的，自然哲学旨在改善我们的理解，而非主要在知识的积累。^⑨

定量研究得到的是公式。公式不是对现象的解释，而是采用一种新的语言重新对现象进行描述。这一点之所以常常被误解，因为数学描述不同于我们通常所说的那些有声有色的描述，而是在描述现象背后的规律。自由落体定律描述了一个物体怎样下落，而没有解释这个物体为什么下落，它为什么开始下落以及是否将继续下落。^⑩

从伽利略和牛顿开始，越来越多的自然现象得以用数学语言来成功地加以描述。一两个世纪以后，物理学整体上数学化了，“任何近代物理理论实质上是一个数学方程体系”。物理意义逐渐不再是必须询问的东西。克莱因说，对于这一点，“那些没有进入到（数学）这座现代德尔菲神秘之城的门外汉是不满意的，但是现在科学家已经学会接受了。的确，面对如此众多的自然界的神秘，科学家非常高兴把自己隐藏在数学符号之中”。^{[4](p.319)}

物理学成为科学的典范。其他学科一一跟进。哈维把定量研究引入生理学，据科恩说，这也是哈维最初能获得支持的唯一理由。^{[14](pp.243,245)}达尔文理论仍是定性理论，不过，生物学中有相当一部分逐渐变为应用物理学和化学的一个分支，而且，概率论不久就被引入生物进化的研究。到20世纪，进化论理论大规模地数学化了。例如，关于群体中的基因频率在世代交替过程中保持不变的哈迪—温伯格原理就是通过纯粹数学方法得出的。乔治·威廉姆斯说：“在最终意义上，自然选择涉及的是一个控制论意义上的抽象概念即基因，以及一个统计学意义上的抽象概念即平均表现型适合度。”^{[15](p.28)}有多少数学，就有多少科学。物理学是“硬科学”的典范，生理学和生物学仍然不像物理学那样硬。我们用同样的眼光看待社会科学，在社会科学里，经济学是最硬的科学，社会学之属努力把数学引入自身，但其“科学性”还远远不如经济学。

自然由深藏在现象/事物背后的数的运行或数的规律指挥，这是一个古老的信念。不过，在那个古老的年代，数这个概念还夹杂着大量感应因素。利用纯数学来描述我们实际身处其中的现象/事物，这在古代的成功应用是很有限的。这些描述远不能提供整体的自然图景，它们毋宁是用来加固这个信念的一些例证。而近代以数学为原理的思想，则要求全面地使用数字来描述每一自然现象。数学在近代科学中的应用不仅远为广泛，而且远为深刻。经过数百次连续演绎推理得出的一个定理，在应用中竟被证明是完全正确的，这似乎只能给出一个结论：自然界是按照一个合乎理性的计划设计的。数学成了理性的代名词。在新进的思想家看来，要坚持理性态度，就等于用数学来考虑问题。理性由合情合理转变为数学理性。

四、为什么是数学？

我们勾画了近代科学的数学化轮廓。但我们最关心的是这个问题：为什么数学或数学化能够带来科学革命？能够让物理学家们深入外部宇宙的核心，取得前人所无法设想的辉煌成就？这是一个巨大的问题，本节只能提供一点儿粗浅的思考。

说到数学的优点，人们常提到精确性和普遍性。

数学是精确的，因此近代科学中成熟的部分得名为“精确科学”。数字可以描述极小或极大的量，我们平常说长短、很长、很短，这些说法是不精确的，身高1.88米和1.90米都个子很高，但1.88米和1.90米这两个数字却说出了两者的细微不同。不过这种意义上的精确是乏味和不足道的，在这个意义上，“数学是精确的”这话没说出什么特别的东西，无非是说数学语言是专门用来处理量的，所以它特别适合处理包括量上的细微区别在内的各种与量有关的事情。羡慕和仰慕有细微的区别，但这个区别并不适合用数学来处理。自然语言原本是包含数字的，如果需要，我们也能够用自然语言来表示各种量上的差别。然而，如亚里士多德的十范畴所提示的，量只是我们平常所关心的种种范畴中的一个，我们平常更多关心的是质，自然语言在表示极细微的量上的差别相当笨拙就是可理解的了。

“数学是精确的”这一说法的远为重要的意义是说：数学是明确无歧义的，数学描述和数学推理具有唯一性。笛卡尔赞美数学的明确性，就是着眼于数学推理的唯一性。从人皆自利可以推出母亲在和女儿利益冲突时将保护她本人的利益，也可以推出她将保护女儿的利益，这是因为自利概念或自我概念包含着丰富的或曰芜杂的（视你的立场而定）内容。而从 $2+2$ 只能推出4。

与精确性和唯一性相关的是全等的概念。 $2+2=4$ ，完完全全相等。自然概念中也有些“同义词语”，例如快乐和愉快，例如张三打了李四和李四被张三打了，但它们之间几乎总是有点儿细微差异的，而 $87+133=110+110$ 却是完全相等。

但这样来比较数学中的全等和自然表达式之间的近似是不妥当的。数学中能够出现全等，不是由于数字精确，而是由于数学是描述量的语言。羡慕和仰慕有细微的区别，这种区别不是量上的区别。而量之间的可比与质之间的可比不是一回事。质在某种意义上也是可比的，这一红色比那一红色更红，这一曲子比那一曲子更悦耳，这人比那人更善良。但是，大的量是由小的量相加而成，较强的质却不是由较强的质相加而成，如迪昂所指出，把很多暗红色的布头缝在一起并不会得到一块鲜红的布，很多平庸的数学家聚在一起不会成为拉格朗日。“质的每一强度都具有它自己的个性特征。”^{[2](p.127)}

量上的可比性是为计算服务的。为了能够计算，我们就需要把质的强度转换为量的大小。例如，我们用温度计里水银柱的高低来标示冷热的变化。两个较热不能相加为更热，但水银柱标度的数是可以加减的。进一步，我们还要努力把不同的质转换为可以换算的量，例如把红黄这些颜色转换为波长。“为了使数学家把具体的实验境况引进他的公式，就必须以测量为中介把这些境况翻译为数。”^{[2](p.150)}实际上，物理学要求把所有的质都翻译为数，从而纳入可计算的范围。笛卡儿要求把一切性质都还原为长宽高，用意在此。

因此，全等并不是从数学的精确性中产生出来的，而是数学语法的基本设置——数学语言本来就是用来进行计算的，或者说，是用来进行计算式推理的。数学之为物理学的语言，就在于物理学从量上来看待自然，描述自然，因此，物理学就需要把各种质还原为量，从而可以互相比较和换算。数学中的等式是量之间换算的主要工具。自然概念则首先是质的，我

们关心的是羡慕和仰慕在质上的区别，量上的区别是第二位的。所以，全等在自然语言中并无用武之地，因为自然语言的用途不在于计算。

这就把我们引到了数学的普遍性上。巴伊说：“数学解释的优势在于它们具有普遍性。”^{[14](p.215)}这代表了很多论者的看法。尽管人们经常称说数学的普遍有效性，但人们是在什么意义上谈论普遍的，并不很清楚。人们通常把这种普遍性理解为可以应用于万事万物。然而这是有疑问的。一方面，哲学不也具有普遍性吗？原子论、决定论、一分为二，都说是普遍规律或一般世界结构。另一方面，两个相濡以沫共同生活了多年的夫妇感情破裂，我们很难用数学来解释破裂的原因，也很难用数学计算出其间的谁是谁非。

要理解数学的“普遍性”，关键在于认识到并牢记：数学是一种语言，不是可与物理学类比的一门科学。“大自然这部书是用数学文字写成的”这句箴言已经明白说出了这一点。然而，我们不是也像说到研究物理学一样说到研究数学吗？是的，纯数学家研究数学，很像语言学家研究语言。用齐曼的话说：“纯数学并不是普通的科学……纯数学家是语法和句法的专家。”^{[16](p.20)}

数学是一种语言，所谓数学的普遍性无非是说：数学是一种通用的语言，而不像英语、汉语、斯瓦西里语那样是一个语族所使用的语言。

哲学曾希望找到世界的客观的本质结构。然而，即使找到了，我们的表述也会因为语言的限制而受到歪曲。也许是德国人最先找到了这个结构，我们能用汉语来表达这个结构吗？显然，如果原因不恰恰等同于 Ursache，幸福不恰恰等同于 Gluecklichkeit，那么，在用汉语表达这一结构时就会走样。当然，困难远不止于表述。哲学家们最初开始寻找的是原因吗？还是 Ursache？还是 cause？还是 aitia 或别的什么？希腊人对这里的麻烦为敏感，他们只承认一种语言。中国古人对此也不敏感。这个麻烦后来却越来越困扰近代的欧洲思想家。发明或发现一种普遍语言成为近代思想家的持续不懈的努力，从培根和莱布尼茨到柴门霍夫，从弗雷格到乔姆斯基和 S·平克。然而，在数学语言之外，我们无法找到这种语言。莱布尼茨希望构造一种普遍语言，本来就意在使我们的论证变得和计算一样。然而，何必另外构造一种，数学就是现成的普遍语言。要让论证变得和计算一样，就不得不让语言变成数学语言。

然而，为什么数学语言会成为普遍语言呢？简言之，数学的普遍性来自量的外在性。数学是描述量的语言，而量是互相外在的。亚里士多德说，量是具有相互外在的部分的东西。迪昂评论说这一说法过于简单，在我看，简单固然简单，这个说法却委实道出了量的本质。像“实在”一节所表明的，数字没有概念内容，它是一个纯形式符号，其“意义”完全由它与其他同族符号的（外部）关系规定。亨佩尔说“数学系统是一个没有经验内容的庞大而精巧的概念结构”，^[1]所说的大致是这层意思，正如迪昂指出的，科学家不去单独研究所涉的概念，而是把它们转化为维度概念，以使用数来表示它们。接下来，“他们不是把这些概念的性质本身联系起来，而是把测量所提供的数交付按照固定的代数法则进行的处理。他们用运算代替演绎”。^{[2](p.71)}

数学之为普遍语言，但这不是说，数学语言比到处泛滥的英语更加普遍，它也不是像世界语那样的建制，数学之能成为普遍语言，因为它是另外一类语言，它由不具内涵的符号组成，因此能够用来从事漫长的推理。我们下一节将谈到，这一点使得近代科学最终能够通达我们的自然认识无法企及的事物，不断有效地扩大我们的知识领域。

五、数学所描述的世界

人们经常争论数学世界是不是真实的世界、实在的世界；人们也争论常识眼中的世界和

物理学所描述的世界哪个是真实的世界，或哪个是更真实的世界。这个争论牵涉到真实、实在这些搅成一团的概念。本节只拟从一条线索来谈谈这个争论。

“数学世界”也许是和“桥牌世界”、“丝绸世界”的用法差不多。数学家沉浸在数学世界里，桥牌迷沉浸在桥牌世界里，这时候谈不上数学世界是否真实。

“数学世界”还可能有什么别的意思呢？数学是一种语言，它描述世界，“数学世界”即由数学描述出来的世界。

然而这时候问数学世界是否真实是什么意思呢？我们不会问，汉语是否真实地描述了世界；我们可以用汉语真实地描述世界，也可以用汉语歪曲世界。我们一般不会问，汉语和英语所描述的世界哪个更加真实。我们会问，汉语的长处何在，汉语的短处何在。一个双语者在有些场合觉得说甲种语言达意，有时说另一种语言达意。我们可以像布鲁纳那样，把自然语言和数学语言视作“一种特殊意义上的双语”。^{[17](p.132)}当然，数学语言与自然语言的关系，并不完全类同于汉语和英语的关系，英语和汉语是并列的两种语言，自然语言和数学语言是两个层次上的语言。

我们从这两个层次的语言各自的短长可以更清楚地透视实在问题。

从伽利略以来，圆锥曲线运动就被视作两个直线运动的综合。我们不妨说，从数学的角度来看，存在着两个运动。不过，这里的“看”是看的衍生意义，严格说，数学并不看，而是分析和计算。较少误解的说法是，采用数学语言，圆锥曲线运动就可以被描述为两种运动之合成。

伽利略为什么要多此一举呢？因为把圆锥曲线还原为两条直线我们就能去除曲线和直线之间的以及不同种类曲线之间的质的区别，使得不同的性质的轨迹可以相互比较和换算。上节说到，数学语言的优势在于它的外在性，由于数学语言不受制于概念内容的束缚，它能够进行漫长的推理而不失真。通过把一颗彗星的椭圆轨道描述为由它固有的直线运动与受到太阳引力作用而做的直线运动所合成，我们就能够计算出这颗彗星的整个轨迹，包括它处在无法被观察到的遥远空间的轨迹。数学推理的长程有效性给笛卡儿以最深刻的印象：“几何学家通常总是运用一长串十分简易的推理完成最艰难的证明。这些推理使我想象到，人所能认识到的东西也能是像这样一个接着一个的，只要我们不把假的当成真的接受，并且一贯遵守由此推彼的必然次序，就决不会有什么东西遥远到根本无法达到，隐藏到根本发现不了。”^{[18](p.16)}

数学推理无疑和概念演绎有亲缘，但数学推理自有其特点。我们的自然语言是我们的经验培育起来的，它受到我们的感性和经验的约束。自然语言也含有逻辑，我们能依循其中的逻辑通达我们不能直接感知的事物，我们多多少少能够理智地谈论神明、物自体、月上天球的相互作用方式，然而这些谈论始终受到可感的特殊事物^②的约束。上节说到，由于自利概念包含着多维的内容，含有自利概念的自然推论就不可能具有唯一性。我们甚至不妨说，在自然推论中，想象力比数理（推理）能力所起的作用更大。受过近代科学方法训练的人，难免不抱怨使用自然语言进行推论太不确定、太含混，缺少必然性。而在数学推理中就没有这些不便。数字没有概念内容，它和其他数字的关系是外在的，就是说，一个数字完全是在它和其他数字的比例中被定义的，通过等式的不断转换，数学推理无论走多远，都保持着原本的完全等同。具有了这种外在性，数学推理就可以突破我们感性的藩篱，走得很远很远。“夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度”，然而，通过等式的不断转换，我们就可以度量巨大的宇宙和微小的粒子。我们现在知道地球的大致重量，这不是我们用秤称出来的，而是通过

数学分析和演算得出的。

然而，这种摆脱了感性的外在推理有它的代价，那就是丧失直观。毕竟，我们看到的，是一个单一的曲线运动，而不是两个直线运动。我们的自然理解始终依赖直观，数学语言迫使我们进入一种新的理解，技术性理解。前面引用的一段笛卡儿曾赞叹几何学证明是那样简单易解，然而齐曼却另有高见：“数学推理的实质是它的每一小部分很容易理解，而合在一起则很难理解。”^{[16](p.22)}一小步一小步的理解在技术性上构成一个总体的理解，但那是不是直观意义上的整体理解。

法拉第曾写信问麦克斯韦，他是否能用普通语言来表达其数学工作的结论，以使非数学家能够理解他的工作并因此受益。克莱因在引述这封信后说到：“遗憾的是，法拉第的这个要求直到今天仍得不到满足。”^{[2](p.317)}这是当然的，我们一开始采用数学语言，就是因为它能够不受自然理解的束缚，通达某些我们由于感性限制所不能了解的真实。

以上论述应有助于我们重新审视数学世界的真实性问题。一方说，真实存在的是单一的曲线运动，力学分析只是假说。另一方说，能够使用数学来描述的两个直线运动及其合成才是现象背后的真实存在，曲线运动只是现象，乃至只是幻象；就像 X 光照出来的才是真相，脸长得漂亮不漂亮不过是些主观的感觉。现在我们应能看到，这样的争论错失了要点。这里的区别不是真和幻，而是所使用的语言是否可得到直观的理解。

在一个平俗的意义上，张三比中国实在：你可以实实在在拥抱张三，但你只能在比喻的意义上拥抱中国。在这个意义上，当然可以说数字所指的东西不像张三所指的东西那么实在。然而，这里的差别不是张三和中国是否具有指称，也不是这两个词所指称的东西哪个更多实在，——这种说法不过是把我们平俗意义上所说的实在转化成为形而上学的说法，把原本明明白白的话变得无意义或至少意义含混；这里的差别是具体和抽象的差别，或是在讨论哪些概念就理解而言依赖于哪些概念。实数比虚数实在，大概不外是说：我们不掌握实数就无法理解虚数，而不是说，世界上有一些叫作实数的实体却没有虚数这种实体。我们用秤称出了黄瓜的实实在在的分量，我们通过计算得到地球的重量，或氢原子的重量，那也同样是实实在在的份量。

数学描述完美符合定义的抽象的存在，但这个存在却被剥夺了其他属性。这是反对把数学应用于社会科学的最基本的理由之一。齐曼问道：IQ 相加的算术运算能有什么意义呢？ $87 + 133 = 110 + 110$ 在智力范围内没有对应物。^{[16](pp.16,165)}塔西奇直白说：“图灵机这种抽象的计算机被专门设计来捕捉我能够计算的所有对象，但不是我能够做的所有事情。图灵肯定没有把他的模式运用到对人类婚庆仪式的详细研究之中。”^{[19](p.117)}就像语言不能穷尽我们身处其中的世界的生动与丰富，数学语言触及不到很多日常事实。它就事物之可测量的维度加以述说。数学的普遍性绝不是数学的普遍适用性，例如，“对于探讨科学的实际变化的历史学家来说，数学是一个不良先例，一个无论如何都不能推广的例子。”^{[20](p.211)}

回过头来看，声称数学具有普遍性是浮面之见。数学的确建立了某种普遍的联系，然而它破坏了另一种统一的联系。我们在数字中看到了炮弹、地球和行星运动的一致性，而不是在感觉、经验之中。世界不再是统一到人的象中，而是统一到数字中。如何瓦雷所云，感性的 *cosmos* 瓦解了，代之以“理智的统一性”，^{[21](p.9)}库恩应和道：“最后，分崩离析的亚里士多德宇宙被一种全面而融贯的世界观所取代，人类自然概念的发展进入了新的篇章。”^{[22](p.253)}

(责任编辑 唐忠毛)

注 释:

①转引自网上 Stanly L. Jaki, *A Late Awakening to Good in Physics*.

②转引自马祖毅,《中国翻译史》,上,湖北教育出版社,1999,474页。

③《左传·僖公十五年》。

④董仲舒,《春秋繁露·同类相动》。

⑤4或正方形代表正义这一观念通过 square 这样的词语保留到现在。

⑥4和正义不是单纯现象相似意义上的相似;四是两个平等的数的乘积,自乘和互相酬报在概念上亲缘。总的说来,在毕达哥拉斯学派那里,数与现象的对应更多是结构性上的对应。张祥龙在《数学与形而上学的起源》一文中多次强调了这一点:毕达哥拉斯借以论证万物与数相似的“最根本的理由是结构性的”,“在西方传统形而上学的主流唯理论的开端这里,(也)有一种结构推演的精神在发挥关键性作用”。张祥龙,《数学与形而上学的起源》,载于《云南大学学报》,2002年第二期。这一点判定了,从理论形态上说,毕达哥拉斯理论比五行理论要成熟得多。

⑦庄子,《渔父》。

⑧他这里说东方要是指印度,但也包括中国;在同一章的最后他也说到,“在中国人手里,也像在印度人手里一样,数学这门学科并不是那么抽象的”(同上引,84页)。我不了解印度古代的数学,就我所知,中国古代数学如《九章算术》及刘徽注中都包含有抽象证明。但若以《几何原本》来衡量,仍可认为以上数学史家的断论大致成立。

⑨哲学和近代物理学的区别我将另文讨论。

⑩引力似乎提供了一种原因方面的解释。但它与其说是一种物理原因,不如说是一个数学原理,就像牛顿本人所称,万有引力不是一种物理力,而是一种“数学的力”。对此我将另文进行更详细的讨论。

⑪亨佩尔,论数学真理的本性,载于保罗·贝纳塞拉夫/希拉里·普特南编,《数学哲学》,朱水林等译,商务印书馆,2003,454页。

⑫相当于斯特劳森所说的 particulars,多有译作殊相的,但译作殊相似乎不如译作特殊事物。

文献参考:

- [1] T·丹齐克,苏仲湘译,数——科学的语言 [M],上海:上海教育出版社,2002.
- [2] 迪昂,李醒民译,物理理论的目的和结构 [M],华夏出版社,1999.
- [3] S·温伯格,李泳译,终极理论之梦 [M],长沙:湖南科学技术出版社,2003.
- [4] M·克莱因,张祖贵译,西方文化中的数学 [M],上海:复旦大学出版社,2004.
- [5] 柏拉图,王晓朝译,国家篇 [M],北京:人民出版社,
- [6] 李零,中国方术考 [M],上海:东方出版社,2001.
- [7] 薛定谔,颜锋译,自然与古希腊 [M],上海:上海科学技术出版社,2002.
- [8] 莱昂·罗塞,希腊思想和科学精神的起源 [M],南宁:广西师范大学出版社,2003.
- [9] 伊恩·斯图尔特,潘涛译,自然之数 [M],上海:上海科学技术出版社,1996.
- [10] 林德伯格,西方科学的起源 [M],北京:中国对外翻译出版公司,2001.
- [11] 史罗芬·巴克尔,韩光焘译,数学哲学 [M],北京:三联书店,1989.
- [12] 斯科特,侯德润、张兰译,数学史 [M],南宁:广西师范大学出版社,2002.
- [13] 海德格尔,孙周兴译,近代科学、形而上学和数学 [A],海德格尔选集(下) [C],上海:上海三联书店,1996.
- [14] 科恩,旭东、赵培杰、宋振山译,科学中的革命 [M],北京:商务印书馆,1999.
- [15] 乔治·威廉姆斯,善霞译,适应与自然选择 [M],技术出版社,2001.
- [16] 约翰·齐曼,赵振江译,可靠的知识 [M],北京:商务印书馆,2003.
- [17] 杰罗姆·布鲁纳,彭正梅译,左手性思维 [M],上海:上海人民出版社,2004.
- [18] 笛卡尔,王太庆译,谈谈方法 [M],北京:商务印书馆,2005.
- [19] V·塔西奇,蔡仲、戴建平译,后现代思想的数学根源 [M],上海:复旦大学出版社,2005.
- [20] 福柯,谢强、马月译,知识考古学 [M],北京:三联书店,2003.
- [21] 柯瓦雷,张卜天译,牛顿研究 [M],北京:北京大学出版社,2003.
- [22] 库恩,吴国盛等译,哥白尼革命 [M],北京:北京大学出版社,2003.